# BACCALAURÉAT BLANC 2017

## MATHÉMATIQUES

**Série: S** **Obligatoire**

**Durée de l'épreuve: 4 heures – coefficient 7**

**Ce sujet comporte 6 pages**

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

L'usage de formulaires ou de documents n'est pas autorisé.

**Le candidat doit traiter les quatre exercices**

**Les annexes sont à rendre avec la copie**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

# EXERCICE 1 (5 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un sautoir pour plonger et d'un toboggan.

On observé que si un manchot choisit :

- Le sautoir, la probabilité qu'il le reprenne est de 0,8
- Le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3

Lors du premier passage, les 2 équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier $n \geq 1$ , on considère les événements : :
$S_n$ : « le manchot utilise le sautoir lors de son n-ième passage »
$T_n$ : « la manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage »

**Partie A :**
Dans cette partie on considère que le manchot exécute deux passages

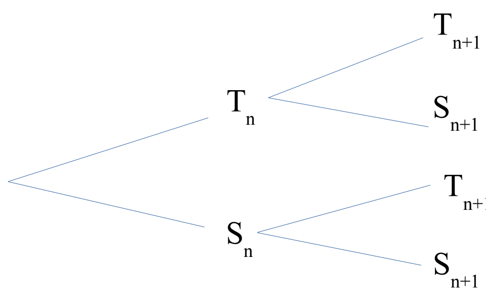
**1.** Représenter le problème sous la forme d'un arbre de probabilité.
**2.** Montrer que la probabilité que le manchot utilise le toboggan au 2ième passage est de 0,25.
**3.** Le manchot utilise le toboggan au deuxième passage. Quelle est la probabilité qu'il ait utiliser la sautoir au premier passage.

**Partie B :**
Dans cette partie, on considère que le manchot exécute plusieurs passages successifs

Pour tout entier $n \geq 1$ , On appelle $u_n$ la probabilité que le manchot utilise le toboggan au n-ième passage ( $u_n = P(T_n)$ )

**1.** Donner les valeurs de $u_1$ et $u_2$

**2.** Recopier puis compléter l'arbre ci-contre.




**3.** Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ ,

$$u_{n+1} = 0{,}1\,u_n + 0{,}2$$

**4.** On souhaite estimer le comportement à l'infini de la suite $(u_n)$ .

**a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant pour calculer le $N$ -ième terme de la suite, $N$ étant entré par l'utilisateur.

**b.** Conjecturer le comportement à l'infini de la suite $(u_n)$ .

```
Variables
        N, I, u : nombres
Traitement
        Entrer N
        u= …
        Pour I =2  à …
                u=….
        Fin Pour
        Afficher ….
```

## EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre $j$ et de mettre en évidence un lien entre ce nombre et des triangles équilatéraux.

**Partie A : propriétés du nombre *j***

**1 a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$ .

**b**. Vérifier que le nombre $j$ est une solution de cette équation.

**2.** Déterminer le module et un argument du nombre complexe $j$ puis donner sa forme exponentielle.

**3.** Démontrer les égalités suivantes :
**a.** $j^3 = 1$
**b.** $j^2 = -j - 1$

**4.** On note P , Q et R les images respectives des affixes $1$ , $j$ et $j^2$ dans le plan .

Quelle est la nature du triangle PQR. Justifier la réponse.

**Partie B : propriétés du nombre *j***

Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + bj + cj^2 = 0$

**1.** En utilisant la question **A3b**. , montrer l'égalité $a - c = j(c - b)$ .

**2.** En déduire que AC=BC .

**3.** Démontrer l'égalité $a - b = j^2(b - c)$ **.**

**4.** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

## EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x^2)+1$ .

Sa courbe représentative $C_f$ est tracée sur le graphique en annexe.

1. Justifier que la fonction $f$ est croissante .

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\ln(1+u_n^2)+1 \end{cases}$ pour tout entier $n$ .

2. Construire sur le graphique les termes successifs $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ , $u_3$ , $u_4$ et $u_5$ .
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n$ , $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 4$
4. En déduire que la suite est convergente.

On note $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$ .

5. a) Montrer que $g'(x)=\dfrac{-x^2+2x-1}{(1+x^2)}$ pour tout nombre réel $x$ .

   b) Etudier le signe de $g'(x)$ .

6. En déduire le tableau de variations de $g$ sur l'intervalle $[0\,;4]$ .
7. a) Justifier que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[0\,;4]$ .

   b) En donner une valeur approchée à 0,001 près.

c) Quelle conclusion en tirer ?

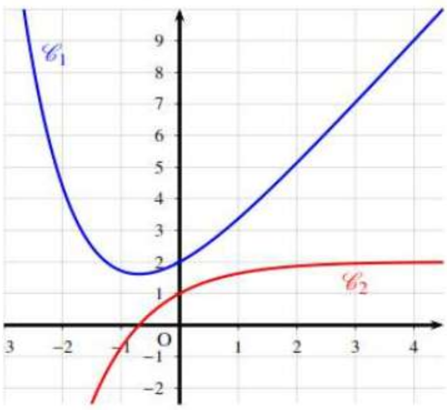
## EXERCICE 4 (5 points)

### Partie A

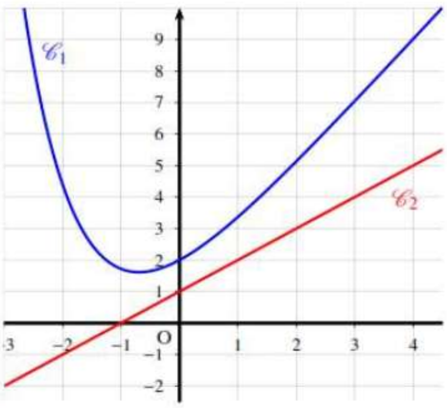
$f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ . $f'$ est la fonction dérivée de la fonction $f$ .
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $C_1$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $C_2$ la courbe représentative de la fonction $f'$ .
Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $C_1$ .
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $C_2$ .

**1.** Sur les trois graphique ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $C_1$ .
Sur l'un d'entre-eux, la courbe $C_2$ est tracée convenablement.
Indiquer lequel et justifier votre réponse.

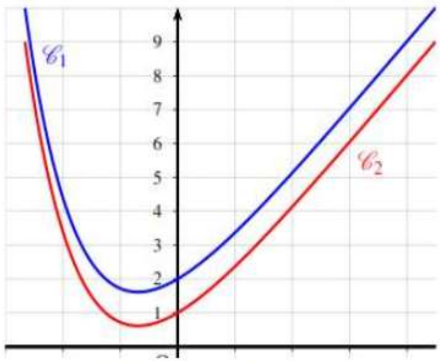
Situation 1




Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)




Situation 3




**2.** Déterminer l'équation réduite de la droite $\Delta$ tangente à la courbe $C_1$ en A .

**3.** On sait que pour tout réel $x$ , $f(x)=e^{-x}+ax+b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
**a.** Déterminer la valeur de $b$ en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

**b.** Prouver que $a=2$ .

**4.** Etudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ .

**5.** Déterminer la limite de la fonction $f$ est en $+\infty$ .

### Partie B

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par . $g(x)=f(x)-(x+2)$

**1.** Montrer que la fonction admet 0 comme minimum.

**2.** En déduire la position de la courbe $C_1$ par rapport à la droite $\Delta$ .

**Numéro Anonymat :** **Classe :**

**ANNEXE EXERCICE 3**