BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

Correction de l'épreuve de MATHÉMATIQUES

Séries : **ES et L Option Maths**
Séries : **ES Option Maths**

Remarque : dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Notons par ailleurs que la rédaction est souvent très détaillée pour faciliter les révisions ultérieures et que les théorèmes ou définitions rappelés n'étaient pas nécessairement attendus.

Exercice 1. 4 points

Commun à tous les candidats.
Des observations ont établi qu'à la fin de l'été 2010, un glacier de haute montagne possédait un volume de 50 000 m^3. Chaque année, pendant la période hivernale, ce glacier se recharge de 10% de son volume puis perd en moyenne 6 000 m^3 pendant l'été. On modélise la situation par la suite (u_n) définie pour tout entier n par :
$u_0 = 50$; $u_{n+1} = 1,1 \times u_n - 6$, *où u_n désigne le volume du glacier, en milliers de m^3, à la fin de l'été de l'année 2010 + n.*

Partie A

1.

1. a. [0,25 point] Vérifier que le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2011 est de 49 000 m^3.
Le terme u_n désigne le volume du glacier, en milliers de m^3, à la fin de l'été de l'année 2010 + n donc le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2011 est donné, en milliers de m^3, par :

$$u_1 = 1,1 \times u_0 - 6 = 1,1 \times 50 - 6 = \underline{49}$$

Le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2011 est bien de $\underline{49\,000\ \mathrm{m}^3}$.

1. b. [0,25 point] Calculer u_2.

$$u_2 = 1,1 \times u_1 - 6 = 1,1 \times 49 - 6 = \underline{47,9}$$

Le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2012 est de $\underline{47\,900\ \mathrm{m}^3}$.

2. *On propose l'algorithme suivant* :

INITIALISATION	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 50
TRAITEMENT	Tant que $u \geq 40$ faire
	Affecter à u la valeur $1,1\ u - 6$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
SORTIE	Afficher 2010 + n

2. a. [0,75 point] Donner le résultat affiché par cet algorithme.
Dans l'algorithme :

- la variable u permet de calculer les termes de la suite (u_n) ;
- n correspond à l'indice du terme calculé ;
- La boucle de l'algorithme comporte la condition $u \leq 40$.

On calcule donc les termes de la suite jusqu'à invalider cette condition, c'est à dire jusqu'à obtenir un terme inférieur strictement à 40.
Remarque : L'existence d'un terme invalidant la condition est assurée par le fait que la suite tende vers $-\infty$. Cela n'était pas demandé.
On sort alors l'indice du terme correspondant et on affiche l'année associée. On peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice, on obtient alors arrondi au millième :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10
u_n	50.000	49.000	47.900	46.690	45.359	43.895	42.284	40.513	**38.564**	36.421	34.063
Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	**2018**	2019	2020

On a alors :

$$\begin{cases} u_7 \approx 40,5 > 40 \\ u_8 \approx 38,6 < 40 \end{cases}$$

L'algorithme affiche donc le résultat : $\underline{2010 + 8 = 2018}$.

2. b. [0,25 point] Que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice ?
Ce nombre correspond à l'année à partir de laquelle le volume du glacier sera inférieur strictement à 40 milliers de m^3. Avec cette modélisation, en 2018, le volume du glacier sera de 38 564 m^3.

Partie B

1. *Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 60$.*

1. a. [1 point] Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 50 \\ u_{n+1} & = 1,1 \times u_n - 6 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 60 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 60 \\ v_{n+1} &= (1,1\ u_n - 6) - 60 \\ v_{n+1} &= 1,1 \times u_n - 66 \\ v_{n+1} &= 1,1 \times \left(u_n + \frac{-66}{1,1} \right) \\ v_{n+1} &= 1,1 \times (u_n - 60) \\ v_{n+1} &= 1,1 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,1$, et de premier terme $v_0 = -10$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 60 \\ v_0 &= 50 - 60 \\ v_0 &= -10 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -10 \\ v_{n+1} & = 1,1 \times v_n \end{cases} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

1. b. [0,75 point] Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = -10 \times 1,1^n + 60$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,1$, et de premier terme $v_0 = -10$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = -10 \times (1,1)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 60$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 60$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = -10 \times (1,1)^n + 60}$$

On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. [0,75 point] On considère que ce glacier aura disparu lorsque son volume sera inférieur à 10 000 m^3. Déterminer la date que le modèle laisse prévoir pour la disparition du glacier.

- Méthode algébrique.
  D'après la modélisation avec cette suite décroissante, on cherche donc le plus petit entier n tel que $u_n < 10$. On va donc résoudre cette inéquation dans l'ensemble des entiers naturels, et prendre la borne inférieure de l'ensemble des solutions.

$$\begin{aligned} u_n < 10 &\iff -10 \times 1,1^n + 60 < 10 \\ &\iff -10 \times 1,1^n < -50 \\ &\iff 1,1^n > \frac{-50}{-10} \\ &\iff 1,1^n > 5 \end{aligned}$$

  On compose alors par la fonction ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} u_n < 10 &\iff \ln 1,1^n > \ln 5 \\ &\iff n \ln 1,1 > \ln 5 \\ &\iff n > \frac{\ln 5}{\ln 1,1} \approx 16,89 \end{aligned}$$

  Puisque n est un entier, l'ensemble des solutions est composé de tous les entiers supérieur ou égaux à 17. L'indice du premier terme inférieur à 10 est donc 17 et la date que le modèle laisse prévoir pour la disparition du glacier est 2027.

- Utilisation de la calculatrice.
  La suite étant décroissante, on va chercher le plus petit entier n tel que $u_n < 10$. On calcule alors les différents termes de la suite et on indique l'indice du premier terme strictement inférieur à 40.
  À l'aide de la fonction *Table* de la calculatrice on obtient :

n	8	9	10	11	12	13	14	15	**16**	**17**	18
u_n	38.564	36.421	34.063	31.469	28.616	25.477	22.025	18.228	**14.050**	**9.455**	4.401
Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	**2026**	**2027**	2028

  On a :

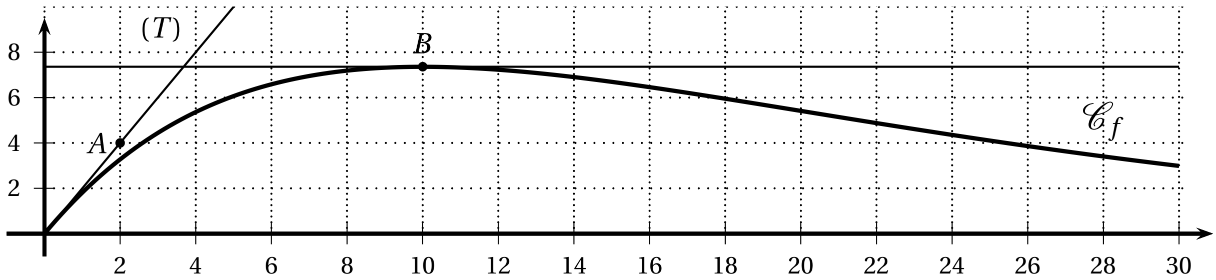
$$\begin{cases} u_{16} \approx 14,050 > 10 \\ u_{17} \approx 9,455 < 10 \end{cases}$$

  Donc la date que le modèle laisse prévoir pour la disparition du glacier est 2027.

Exercice 2. 7 points

Commun à tous les candidats.

Partie A



1. **[1 point] Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(10)$.**
   - *[0,25 point]* Par lecture graphique : $\underline{f(0) = 0}$.
   - *[0,5 point]* La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 passe par l'origine et par $A(2;4)$, donc son coefficient directeur est :
   $$f'(0) = \frac{y_A - 0}{x_A - 0} = \frac{4}{2} = \underline{2}$$
   - *[0,25 point]* La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 10 est parallèle à l'axe des abscisses, donc $\underline{f'(10) = 0}$.

2. *On suppose désormais que la fonction f est définie sur* $[0;30]$ *par :* $f(x) = 2x\,e^{-0,1x}$.

2. a. [0,75 point] Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;30]$ on a : $f'(x) = 0,2\,e^{-0,1x} \times (10 - x)$.
La fonction f est définie et dérivable sur $[0\ ;\ 30]$ et de la forme uv.
Pour tout $x \in [0\ ;\ 30]$, soit $\begin{cases} u(x) = 2x \\ v(x) = e^{-0,1x} \end{cases}$. On a alors $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = -0,1e^{-0,1x} \end{cases}$.
Par conséquent, pour tout $x \in [0\ ;\ 30]$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ & = & 2e^{-0,1x} + 2x \times (-0,1e^{-0,1x}) \\ & = & e^{-0,1x}(2 - 0,2x) \\ f'(x) & = & \underline{0,2e^{-0,1x}(10-x)} \end{array}$$

2. b. [1,5 point] Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;30]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.
Le facteur $0,2e^{-0,1x}$ étant strictement positif quel que soit $x \in [0\ ;\ 30]$, $f'(x)$ est du signe de $(10 - x)$.
Pour tout réel $\underline{x \text{ de } [0\ \ ;30]}$ on a :

$$\forall x \in [0\ ;\ 30]\ ;\ \begin{cases} 10 - x = 0 \iff x = 10 \in [0\ ;\ 30] \\ 10 - x > 0 \iff 0 \le x < 10 \end{cases} \implies 10 - x < 0 \iff 10 < x \le 30$$

x	0	α	10		30
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0 ↗	5 ↗	$20\,e^{-1} \approx 7.36$	↘	$60\,e^{-3}$

3.

3. a. [1 point] Justifier que l'équation $f(x) = 5$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0;10]$. On la notera α.
D'après la question précédente, f est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$,
et $f(0) < 5 < f(10) \approx 7,36$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet donc une unique solution $\alpha \in [0\ ;\ 10]$.

3. b. [0,5 point] Déterminer un encadrement de α au centième.

D'après la calculatrice, $\begin{cases} f(3,57) < 5 \\ f(3,58) > 5 \end{cases}$, donc $\underline{3,57 < \alpha < 3,58}$.

Dans la suite, on admet que l'équation $f(x) = 5$ possède une unique solution dans l'intervalle $[10; 30]$. On note β cette solution. On admet qu'un encadrement de β au centième est $21,53 < \beta < 21,54$.

4. *On admet que la fonction dérivée seconde de f, est définie pour tout x de $[0; 30]$ par : $f''(x) = \dfrac{1}{50}e^{-0,1x} \times (x-20)$.*

4. a. [1 point] Étudier la convexité de f sur $[0 ; 30]$.

$f''(x)$ est du signe de $x-20$ puisque $\dfrac{1}{50}e^{-0,1x} > 0$ pour tout $x \in [0 ; 30]$.

Or

$$\forall x \in [0;30] \quad : \quad \begin{cases} x-20 = 0 \Longleftrightarrow x = 20 \\ x-20 > 0 \Longleftrightarrow x > 20 \end{cases}$$

On en déduit aisément le signe de la dérivée seconde de f :

x	0		20		30
Signe de $(x-20)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent, $f''(x) \leq 0$ sur $[0;20]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[20 ; 30]$.

On en déduit que f est concave sur l'intervalle $[0 ; 20]$, et convexe sur $[20 ; 30]$.

x	0		20		30
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité		f concave		f convexe	

4. b. [0,25 point] Que peut-on en déduire pour le point d'abscisse 20 de la courbe $\mathscr{C}_f$? Justifier.

Le point A d'abscisse 20 est à la frontière entre un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave, c'est donc un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, de coordonnées $A\left(20; 40\,e^{-2}\right)$.

Partie B

Une entreprise fabrique de manière artisanale des jouets en bois. Les bénéfices de la production sont modélisés par la fonction f, où x est le nombre de centaines de jouets et $f(x)$ le bénéfice exprimé en milliers d'euros.

1. [0,5 point] Quel est le nombre de jouets qu'il faut produire pour que le bénéfice soit maximal ? Indiquer la valeur de ce bénéfice maximal à l'euro près.

D'après la partie A, le maximum de f est atteint pour $x = 10$. Il faut donc que l'entreprise produise 10 centaines de jouets, soit 1 000 jouets, pour que son bénéfice soit maximal. Ce bénéfice est égal à $f(10)$ milliers d'euros, soit environ 7 358 euros.

2. [0,5 point] Combien produire de jouets pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 5 000 euros ?

D'après le tableau de variations de f et la question 3 de la partie A, $f(x) \geq 5$ si et seulement si $x \in [\alpha ; \beta]$.

Or on a :

$$3,57 < \alpha < 3,58 \text{ et } \begin{cases} f(3,57) \approx 4.9964 < 5 \\ \underline{f(3,58) \approx 5.0053 > 5} \end{cases}$$

Et

$$21,53 < \beta < 21,54 \text{ et } \begin{cases} \underline{f(21,53) \approx 5.00078 > 5} \\ f(21,54) \approx 4.99810 < 5 \end{cases}$$

Donc l'entreprise doit produire entre 358 et 2 153 jouets pour que son bénéfice soit supérieur ou égal à 5 000 euros.

x	0	α	3.58	10	21.53	β	30
Variations de f	0	5		$20\,e^{-1} \approx 7.36$		5	$60\,e^{-3}$

Exercice 3. 4 points

Commun à tous les candidats.

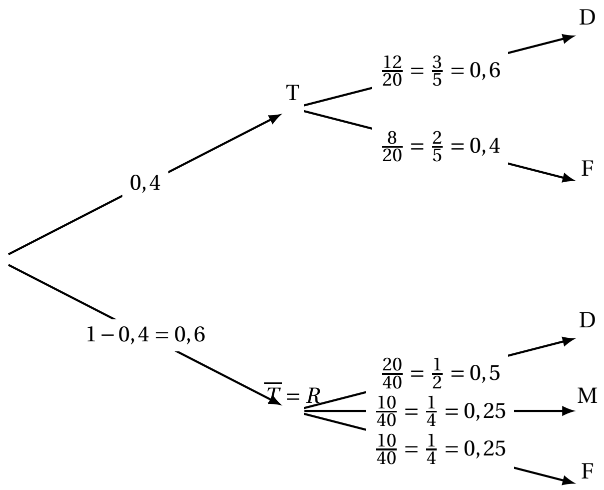
Partie A

Un rallye cycliste est organisé chaque année. 40% *des inscrits pratiquent le VTT (vélo tout terrain), les autres pratiques le vélo de route. Pour le VTT, 12 circuits sont classés difficiles et 8 circuits sont classés faciles. Pour le vélo de route, 20 circuits sont classés difficiles, 10 classés moyens et 10 classés faciles. Chacun des inscrits tire au sort un circuit à parcourir dans sa spécialité. On choisit au hasard un participant à ce rallye. Chaque cycliste a la même probabilité d'être choisi. On note :*

- T l'événement : « *le cycliste choisi pratique le VTT* » ;
- R l'événement : « *le cycliste choisi pratique le cyclisme sur route* » ;
- D l'événement : « *le circuit emprunté est classé difficile* » ;
- M l'événement : « *le circuit emprunté est classé moyen* » ;
- F l'événement : « *le circuit emprunté est classé facile* » .

On donnera les réponses arrondies au millième.

1. **[0,5 point] Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé**.
   La somme sur les nœuds vaut 1.



2. **[0,75 point] On choisit au hasard un participant au rallye.**
   Montrer que la probabilité que cette personne ait effectué un circuit difficile est $0,54$.
   On veut calculer $P(D)$, or T et R forment une partition des inscrits donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap T) + P(D \cap R) \\ &= P_T(D) \times P(T) + P_R(D) \times P(R) \\ &= 0,6 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = \underline{0,54} \end{aligned}$$

   La probabilité qu'un participant , choisi au hasard, ait effectué un parcours difficile est bien égale à 0,54.

3. **[0,75 point] Calculer la probabilité qu'un participant au rallye pratique le VTT sachant qu'il effectue un parcours difficile**.
   On veut calculer $P_D(T)$:

$$P_D(T) = \frac{P(D \cap T)}{P(D)} = \frac{P_T(D) \times P(T)}{P(D)} = \frac{0,6 \times 0,4}{0,54} \approx \underline{0,444}$$

   La probabilité qu'un participant au rallye pratique le VTT sachant qu'il effectue un parcours difficile est donc environ égale à 0,444

Partie B

On choisit au hasard 5 participants à ce rallye. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de participants du VTT parmi les 5 participants choisis. Le nombre de participants étant suffisamment grand, on peut considérer les tirages comme indépendants et les assimiler à des tirages avec remise.

1. **[0,5 point] Préciser la loi que suit X et donner ses paramètres.**
Il y a répétition de 5 épreuves indépendantes. Chaque épreuve a deux issues possibles : succès (T de probabilité $0,4$) et échec (R de probabilité $0,6$).
Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès d'une répétition de $n = 5$ épreuves indépendantes de Bernouilli de paramètre $p = 0,4$, suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$.
On peut écrire X suit $\mathscr{B}(5\ ;\ 0,4)$ ou $X \sim \mathscr{B}(5\ ;\ 0,4)$.

2. **[0,75 point] Déterminer la probabilité qu'exactement 3 participants pratiquent le VTT.**
On veut calculer $P(X = 3)$ or la variable aléatoire X suit $\mathscr{B}(5\ ;\ 0,4)$ donc :

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^2 = 10 \times 0,4^3 \times 0,6^2 = 0,2304 \approx \underline{0,230}$$

On peut aussi donner le résultat directement avec la fonction binomiale de la calculatrice.
La probabilité qu'exactement 3 participants pratiquent le VTT est donc environ égale à 0,230

3. **[0,75 point] Déterminer la probabilité qu'au plus 3 participants pratiquent le VTT.**
On veut calculer $P(X \leq 3) = 0,91296 \approx 0,913$ ce qui peut se faire de deux façons :

- Avec la la fonction binomiale de calculatrice :
On obtient directement avec la fonction binomiale de la calculatrice :

$$P(X \leq 3) = 0,91296 \approx \underline{0,913}$$

- Sans la la fonction binomiale de calculatrice :
Sans la fonction binomiale de la calculatrice, c'est plus délicat car il faut calculer :

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= 1 - P(X > 3) \\ &= 1 - P(X=4) - P(X=5) \\ &= 1 - (5 \times 0,4^4 \times 0,6) - (1 \times 0,4^5) \\ P(X \leq 3) &\approx \underline{0,913} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= (1 \times 0,6^5) + (5 \times 0,4 \times 0,6^4) + (10 \times 0,4^2 \times 0,6^3) + (10 \times 0,4^3 \times 0,6^2) \\ P(X \leq 3) &\approx \underline{0,913} \end{aligned}$$

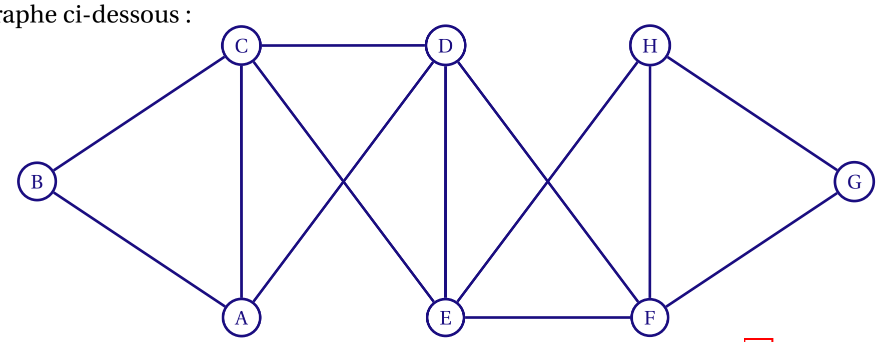
La probabilité qu'au plus 3 participants pratiquent le VTT est donc environ égale à 0,913.

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomFdR* (5 , 0.4 , 3) = 0,91296
> - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFrép* (5 , 0.4 , 3) = 0,91296
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialCD* (3 , 5 , 0.4) = 0,91296

Exercice 4. Spécialité 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère le graphe ci-dessous :



$$R=\begin{pmatrix}4&5&7&8&4&3&1&3\\5&2&6&3&3&3&\boxed{0}&1\\7&6&6&9&9&4&3&3\\8&3&9&6&9&9&3&4\\4&3&9&9&6&9&3&8\\3&3&4&9&9&6&6&7\\1&\boxed{0}&3&3&3&6&2&5\\3&1&3&4&8&7&5&4\end{pmatrix};\ S=\begin{pmatrix}20&11&21&18&21&16&6&8\\11&11&13&17&13&7&4&\boxed{6}\\21&13&31&26&22&24&7&16\\18&17&26&35&28&22&13&21\\21&13&22&28&35&26&17&18\\16&7&24&22&26&31&13&21\\6&4&7&13&17&13&11&11\\8&6&16&21&18&21&11&20\end{pmatrix};\ T=\begin{pmatrix}7&\boxed{6}&9&9&6&4&11&3\\\boxed{3}&4&7&5&4&3&9&1\\11&7&10&11&10&6&3&4\\4&5&11&10&11&10&4&6\\6&4&10&11&10&11&5&9\\9&3&6&10&11&10&7&9\\9&0&3&4&5&7&4&6\\6&10&4&6&9&9&6&7\end{pmatrix}$$

1. *On appelle M la matrice d'adjacence de ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique. Une des trois matrices R, S ou T est la matrice M^4.*

1. a. [0,75 point] Sans calculer la matrice M^4, indiquer quelle est la matrice M^4 en justifiant votre choix.

On rappelle que :

> **Propriété 1** (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)
>
> Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un entier naturel. Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

- Le graphe n'est pas orienté donc le nombre de chemins de longueur p reliant i à j est le même que celui reliant le sommet j au sommet i. La matrice d'adjacence M et toutes ses puissances doivent donc être symétriques.
  Or ici la matrice T n'est pas symétrique puisque par exemple, $t_{2,1}=3$ et $t_{1,2}=6$. La matrice T ne convient donc pas.
- Il existe au moins une chaîne de longueur 4 qui relie les sommets B et G par exemple

  $$B\longrightarrow C\longrightarrow D\longrightarrow F\longrightarrow G$$

  Or $r_{2,7}=0$ et $r_{7,2}=0$ donc la matrice R ne convient pas.
- La matrice S est la seule des trois matrices proposées susceptible d'être égale à M^4 donc $\underline{S=M^4}$.

1. b. [0,25 point] En déduire le nombre de chaînes de longueur 4 entre B et H.

Les sommets étant classés dans l'odre alphabétique, les termes de la matrice M^4 donnent le nombre de chaînes de longueur 4 reliant deux sommets quelconques.

Le terme $s_{2,8}=6$ donc il existe <u>six chaînes de longueur 4</u> qui relient les sommets B et H.

2.

2. a. [0,25 point] Déterminer en justifiant si le graphe est complet.

> **Définition 1** (Graphe Simple et Complet)
>
> - Un *graphe simple* est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.
> - Un graphe simple est dit *complet* si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Les sommets A et E ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet.

2. b. **[0,25 point] Déterminer en justifiant si le graphe est connexe**.

Définition 2 (Graphe connexe)

Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

- Premier argument : Aucun des termes de la matrice M^4 n'est nul. Par conséquent, pour toute paire de sommets du graphe il existe au moins une chaîne de longueur 4 les reliant. Le graphe est connexe.
- Un autre argument : Dans ce graphe non orienté, il existe une chaîne qui contient tous les sommets du graphe :

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow G$$

On peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne donc ce graphe est donc connexe.

3. **[1 point] Ce graphe modélise une partie du plan d'une commune. Les arêtes du graphe représentent les rues et les sommets du graphe sont les points de vente de quotidiens. Est-il possible de planifier un parcours permettant le nettoyage de toutes ces rues sans emprunter plusieurs fois la même rue ? Justifier la réponse. Si oui proposer un parcours.**
Effectuer un parcours en passant par toutes les rues sans emprunter plusieurs fois la même rue c'est chercher si il existe une chaîne eulérienne. Citons le théorème d'Euler

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

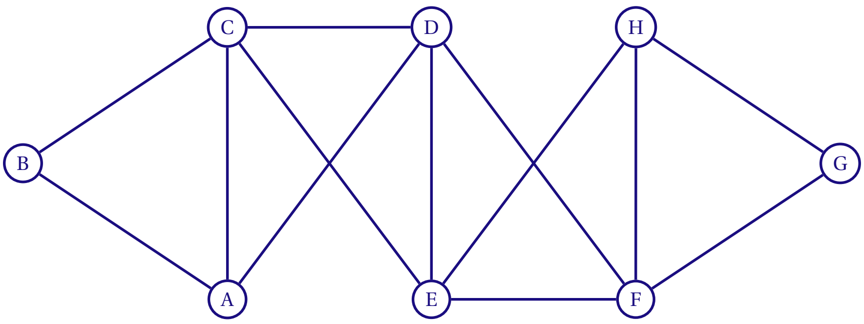
- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

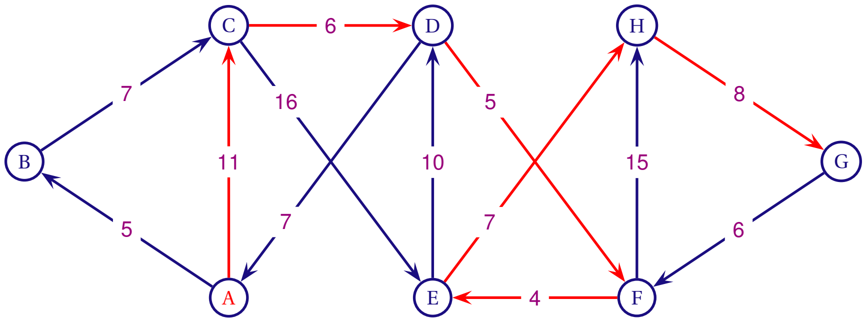
Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	2	4	4	4	4	2	3

Le graphe est connexe et il n'y a que deux sommets A et H de degré impair, d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, il existe donc une chaîne eulérienne d'extrémités A et H.

Un exemple
Il est possible d'organiser un parcours permettant le nettoyage de toutes ces rues sans emprunter plusieurs fois la même rue. Par exemple $A - C - D - A - B - C - E - D - F - G - H - F - E - H$



4. Le graphe pondéré ci-dessous, donne en minutes, les temps de parcours moyens des différentes rues en tenant compte des sens uniques.



4. a. [2 points] Après avoir effectué une livraison au point de vente A, le livreur doit récupérer les quotidiens invendus au point de vente G.
En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à G.
Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à G, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

de ... à	B	C	D	E	F	G	H
A	**5A**	11A	∞	∞	∞	∞	∞
$B(5A)$		**11A**	∞	∞	∞	∞	∞
$C(11A)$			**17C**	27C	∞	∞	∞
$D(17C)$				27C	**22D**	∞	∞
$F(22D)$				**26F**		∞	37F
$E(26F)$						∞	**33E**
$H(33E)$						**41H**	

Le chemin le plus court pour relier A à G est donc de longueur 41 :

$$\boxed{A \xrightarrow{11} C \xrightarrow{6} D \xrightarrow{5} F \xrightarrow{4} E \xrightarrow{7} H \xrightarrow{8} G}$$

4. b. [0,5 point] Est-il possible en partant de A d'effectuer une tournée qui dure moins de 45 minutes en passant par tous les points de vente de quotidiens ?
D'après la question précédente, le trajet le plus court possible pour aller de A à G dure 41 minutes mais ne passe pas par le sommet B. Comme il est possible d'aller de A à C en passant par B, on remplace dans la chaîne précédente le trajet $A \xrightarrow{11} C$ par $A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{7} C$. On en déduit que le parcours :

$$\boxed{A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{6} D \xrightarrow{5} F \xrightarrow{4} E \xrightarrow{7} H \xrightarrow{8} G}$$

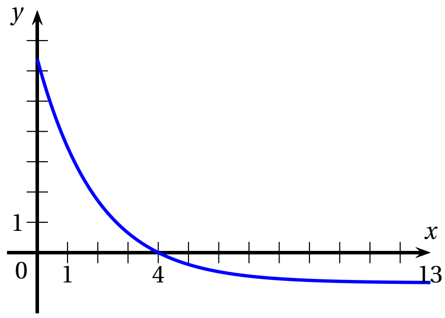
permet d'effectuer une tournée qui dure 42 minutes en passant par tous les points de vente de quotidiens.

Exercice 5. $5 \times 1 = 5$ points

Candidats de la série ES n'ayant suivi l'enseignement de spécialité ou candidats de la série L.

Partie A

On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g', fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.



Affirmation 1 (Faux)

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

Preuve.
Sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, la courbe représentative de la fonction g' est au-dessus de l'axe des abscisses donc g' est positive sur cet intervalle. De fait, la fonction$g$ est croissante sur $[0\,;\,4]$, la proposition 1 est fausse

Affirmation 2 (Vrai)

La fonction g est concave sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.

Preuve.
Ici, la fonction dérivée g' est visiblement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,13]$, par définition, la fonction g est donc concave sur cet intervalle et la proposition 2 est vraie.

Partie B

Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. La vente de ces clés est réalisée par des commerciaux qui se déplacent aux frais de l'entreprise. La direction de l'entreprise décide de diminuer le budget consacré aux frais de déplacements de ses commerciaux.

Affirmation 3 (Faux)

« Diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à le diminuer de 30 % sur la période de 5 ans ».

Preuve.
Effectuer une baisse de 6 % revient à multiplier par $k = 1 - 6\% = 0,94$. Donc diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à multiplier par $k^5 = 0,94^5$. Or on a :

$$0,94^5 = 1 + t\% \iff t\% = k^5 - 1 \approx 26,6\%$$

Donc diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à le diminuer d'environ 26,6 % sur la période de 5 ans. L'affirmation 3 est fausse.

La production mensuelle varie entre 0 *et* 10 000 *clés. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction* B *définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :* $B(x) = -x^2 + 10x - 9$*, où* x *représente le nombre de milliers de clés produites et vendues.*

Affirmation 4 (Vrai)

« Lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB, le bénéfice est positif ».

Preuve.

L'expression $\left(-1x^2 + 10x - 9\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 10 \\ c = -9 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta & = (10)^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 64 > 0 \\ \alpha & = \dfrac{-10}{2 \times (-1)} = 5 \end{array}\right.$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-1x^2 + 10x - 9\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{64}}{-2} = 9 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{64}}{-2} = 1$$

Les deux racines appartiennent à l'intervalle de définition $[0\,;\,10]$. Puisque le coefficient $a = -1$ est négatif, la fonction polynôme du second degré B est positive entre les deux racines et négative ailleurs :

x	0		1		9		10
Signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB (strictement), le bénéfice est positif.
L'affirmation 4 est donc vraie.

Affirmation 5 (Vrai)

« Lorsque l'entreprise produit et vend 5 000 clés USB, le bénéfice mensuel est maximal ».

Preuve.

- On peut appliquer le cours de première en calculant α et en exprimant directement les variations de B.
- On peut aussi étudier la fonction B.
  La fonction B est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
  On a pour tout réel x de $[0\,;\,10]$, $B'(x) = -2x + 10$ et pour $x \in [0\,;\,10]$:

$$\forall x \in [0\,;\,10]\ :\ \begin{cases} -2x + 10 = 0 \Longleftrightarrow x = 5 \\ -2x + 10 > 0 \Longleftrightarrow 0 \leq x < 5 \end{cases} \Longrightarrow -2x + 10 < 0 \Longleftrightarrow 5 < x \leq 10$$

Soit :

x	0	1	5	9	10
Signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B	-9	0	16	0	-9

La fonction B atteint son maximum en $x = 5$ donc le bénéfice est maximal pour une production et une vente de 5 milliers de clés USB.
L'affirmation 5 est donc vraie. Ce bénéfice sera de 16 milliers d'euros (soit 16 000 euros).

Fin du devoir