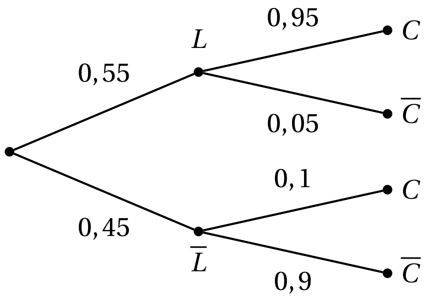
BAC Blanc DURUY - Série ES/L
Session 2019

CORRIGÉ

Exercice 1 : Probabilités

1. L'arbre est le suivant :



2. On a :

$$P(L \cap C) = P(L) \times P_L(C) = 0,55 \times 0,95$$

donc $\boxed{P(L \cap C) = 0,5225}$.

3. L et $\overline{L}$ forment une partition de l'univers donc on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(L \cap C) + P\left(\overline{L} \cap C\right) \\ &= 0,5225 + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(C) \\ P(C) &= 0,5225 + 0,45 \times 0,1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{P(C) = 0,5675}$.

4. D'après la formule de Bayes :

$$P_C(L) = \frac{P(C \cap L)}{P(C)} = \frac{0,5225}{0,5675}$$

donc $\boxed{P_C(L) \approx 0,9207}$.
Parmi les employés souhaitant faire un temps partiel, à peu près 92,07% souhaitent faire du télétravail.

5. (a) Il y a répétition de 4 événements indépendants. Chaque tirage a deux issues possibles : succès (C de probabilité $0,5675$) et échec ($\overline{C}$ de probabilité $1-0,5675$) donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,5675$.

   (b) Puisque X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,5675$ on a :

$$\boxed{p(X=0) = (1-0,5675)^4 \approx 0,0350}$$

   (c) On doit calculer $p(X \geq 2)$ or en passant à l'évènement contraire :

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X \leq 1)$$

donc en utilisant la calculatrice et à 10^{-4} près :

$$\boxed{p(X \geq 2) \approx 0,7814}$$

Exercice 2 : Suites

Partie A

1. u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2020+n)$.
   — Chaque année 5 % des ouvrages sont supprimés, il reste donc $\left(1-\dfrac{5}{100}\right)\times u_n = 0,95\times u_n$.
   — Elle achète 6 000 ouvrages neufs soit 6 milliers donc le nombre d'ouvrages devient $0,95\times u_n+6$.
   — Conclusion :
   Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1}=0,95\times u_n+6}$.
2. Cet algorithme détermine le plus petit entier naturel N tel que $u_N > 100$.
3. La suite est supposée strictement croissante et :

$$\begin{cases} u_{26} & \approx 99,445 < 100 \\ u_{27} & \approx 100,473 > 100 \end{cases}$$

   donc la valeur de N affichée est $\boxed{27}$.
   Interprétation : c'est en 2047 que le nombre d'ouvrages dépassera les 100 milliers.

Partie B

1. Il faut modifier ligne d'affectation de U dans la boucle et l'algorithme devient :

```
U ← 42
N ← 0
Tant que U < 100   Faire
    U ← 0,95 × U + 4
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

   Remarque : même si la suite s'appelle v on peut conserver la lettre U.
2. Pour tout entier naturel n, on a $w_n = v_n - 80$ donc $v_n = w_n + 80$.
   Par ailleurs, pour n entier :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1}-80 \\ &= v_n\times 0,95+4-80 \\ &= (w_n+80)\times 0,95-76 \\ w_{n+1} &= 0,95\,w_n+76-76 \\ w_{n+1} &= \underline{0,95\,w_n} \end{aligned}$$

   De plus $w_0 = v_0 - 80 = 42-80 = -38$, donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $w_0 = -38$.
3. Donc puisque (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $w_0 = -38$ on a pour tout entier n :

$$w_n = -38\times 0,95^n$$

   Et donc de l'égalité $w_n = v_n - 80$ on obtient, pour tout entier n :

$$\boxed{v_n = -38\times 0,95^n + 80}$$

4. (a) On a : $0<0,95<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = w_n + 80$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 80}$.
   (c) Au bout d'un nombre assez grand d'années, le nombre d'ouvrages sera de 80 000. Notons que l'algorithme ci-dessus tourne sans fin puisque 100 est une valeur qu'on ne peut atteindre.

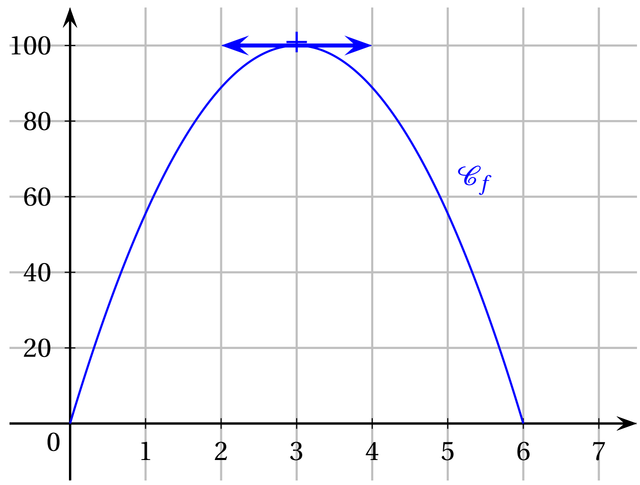
Correction de l'exercice 1

Exercice 3 : Fonctions

Une fonction est dite de « contentement » *lorsqu'elle est dérivable et prend ses valeurs entre 0 et 100. Si la fonction* « contentement » *atteint la valeur* 100*, on dit qu'il y a* « plénitude »*. La fonction* « désir » *est la fonction dérivée de la fonction* « contentement »*. On dira qu'il y a* « voeu » *lorsque la fonction* « désir » *est positive ou nulle et qu'il y a* « refus » *lorsque la fonction* « désir » *est strictement négative.*

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise son contentement en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « contentement » f *dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).*



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. **Lire la durée de travail quotidien menant à «** ***plénitude*** **».**
   Si la fonction « *contentement* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *plénitude* ». . Il y a donc « plénitude » au bout de 3 heures de travail.
2. **Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a «** ***refus*** **».**
   Il y a « *refus* » lorsque la fonction « *désir* » (la dérivée de la fonction f de « *contentement* »), est strictement négative.
   Or d'après le graphique, f est décroissante donc de dérivée négative sur $[3\,;\,6]$. Il y a donc « rejet » après 3 heures de travail.

Partie B

La directrice d'une agence de voyage modélise le contentement de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « contentement » g *est définie sur l'intervalle* $[0;35]$ *par :* $g(x) = 20\,x\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ *où x est exprimé en jour*

1. **Démontrer que, pour tout** x **de l'intervalle** $[0;35]$**,** $g'(x) = (20-4x)\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$**.**

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;\,35] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = (20x) \times \mathrm{e}^{-0,2x+1} \end{array} \right.$$

La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,35]$.
La fonction g est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,35]\,;\; g(x) = u(x) \times v(x) \;\;:\;\; \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (20x) & ; & u'(x) = 20 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,2x+1} & ; & v'(x) = \left(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\,;\,35],\ \ g'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)\\ g'(x) &= 20\times \mathrm{e}^{-0,2x+1} + (20x)\times\left(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right)\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,35]\,;\ g'(x) = (20-4x)\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}}$$

2. **Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0;35]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.**
   Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,2x+1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe du facteur $(20-4x)$. Or on a :

$$\begin{cases} 20-4x>0 & \iff 20>4x \iff 5>x\\ 20-4x=0 & \iff 5=x\end{cases}$$

   Avec

$$g(0)=0\ ,\ \ g(5)=100 \quad \text{et} \quad g(35)=700\,\mathrm{e}^{-6}\approx 1,73$$

   On établit le tableau des variations de la fonction g sur $[0\,;\,35]$:

x	0		5		35
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variations de g	0	↗	100	↘	$700\,\mathrm{e}^{-6}\approx 1.74$

3. **Á quelle durée de séjour correspond l'effet « *plénitude* » ?**
   D'après le tableau de variations, l'effet « plénitude » apparaît au bout d'un séjour de 5 jours.

Partie C

La DRH, directrice des ressources humaines de l'entreprise MANAZONE modélise le contentement d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « contentement *» h, est définie sur l'intervalle $[10\,;\,55]$ par $h(x) = \dfrac{90}{1+e^{-0,25x+6}}$ (x est exprimé en millier d'euros).*

1. **Donner sans justification une expression de $h'(x)$ et de $h''(x)$.**
   D'après le logiciel de calcul formel, pour tout x de $[10\,;\,55]$ on a :

$$\boxed{h'(x)=\frac{22,5\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{h''(x)=\frac{5,625\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^3}}$$

2. **Résoudre dans l'intervalle $[10\,;\,55]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0$.**
   Pour tout réel x de $[10\,;\,55]$ on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0 &\iff \mathrm{e}^{-0,25x+6}>1\\ &\iff \mathrm{e}^{-0,25x+6}>\mathrm{e}^{0}\\ &\iff -0,25x+6>0\\ &\iff x<\frac{-6}{-0,25}=24 \ \text{ et }\ x\in[10;55]\end{aligned}$$

   Sur l'intervalle $[10;55]$, l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0$ a pour solution les réels de l'intervalle $[10;24[$.

3. **Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle [10 ; 55]. Donner les points d'inflexion éventuels.**
La fonction h est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée est croissante, c'est-à-dire quand sa dérivée seconde est positive.

$$h''(x) = \frac{5,625\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^3}$$

Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout x on a :

$$\mathrm{e}^{-0,25x+6} > 0 \Longrightarrow \left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3 > 0$$

et

$$\left(5,625\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right) > 0$$

Et donc que $h''(x)$ est du signe de $\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1\right)$.
D'après la question précédente :

x	10	24	55
Signe de $h''(x)$	+	0	−
Convexité de h	h convexe		h concave

- $h''(x) > 0$ sur $[10;24[$ donc la fonction h est convexe sur $[10;24[$;
$h''(x) < 0$ sur $]24;50]$ donc la fonction h est concave sur $]24;50]$.
- $h(24) = \dfrac{90}{1+\mathrm{e}^{-0,25\times 24+6}} = 45$ donc le point de coordonnées $(24,45)$ est un point d'inflexion.

4. **À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *désir* » décroît ? Justifier.**
La fonction « désir » décroît quand h' décroît donc quand h'' devient négative, soit à partir de $x = 24$, ce qui correspond à un salaire annuel de 24 000 euros.

5. **Montrer que l'équation $h(x) = 80$ admet une unique solution α sur l'intervalle [10 ; 55]. Déterminer une valeur approchée de α au millième. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.**
— On a vue que pour x de [10 ; 55] on a :

$$h'(x) = \frac{22,5\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^2}$$

— Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la dérivée h' est strictement positive sur [10 ; 55] et donc h est strictement croissante sur cette intervalle.

x	10	α	55
Signe de $h'(x)$		+	
f	$h(10) \approx 2.6$	80	$h(55) \approx 89.96$

— Donc sur [10 ; 55], la fonction h est continue, strictement croissante et le réel $k = 80$ est compris entre $h(10) \approx 2,6 < 80$ et $h(55) \approx 89,96 > 80$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 80$ admet une unique solution α sur l'intervalle [10 ; 55].
— La calculatrice donne alors :

$$\begin{cases} h(32,317) & \approx 79,998 < 80 \\ h(32,318) & \approx 80,001 > 80 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\alpha \approx 32,318}$$

— Interprétation : donc on peut dire que la fonction « contentement » h atteint 80 pour un salaire annuel d'environ 32318 *euros*.

Exercice 4 : Obligatoire

1. **Proposition 1** :
   Pour tout réel x ,
   $$1-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^{x}+1)}=\frac{1}{1+e^{x}}$$
   Donc la proposition est VRAIE.
2. **Proposition 2** :
   $h'(x)=1+2e^{2x-2}$. $h(1)=2$ et $h'(1)=3$ donc $T_1 : y=3(x-1)+2$ donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est
   $$T_1 : y=3x-1$$
   Donc la proposition est VRAIE.
3. **Proposition 3** :
   De 2010 à 2017 le taux global d'évolution est égale à $\dfrac{15-4}{4}=2,75=275\%$ qui correspond à un coefficient global d'évolution égal à $1+\dfrac{275}{100}=3,75$.
   Un taux moyen de p% sera donc tel que $(1+p\%)^7=3,75$ donc $p=(3,75^{\frac{1}{7}}-1)\times 100\approx 20,8$ donc un taux moyen d'évolution annuel de $20,8\%$ approximativement.
   Donc la proposition est FAUSSE
4. **Proposition 4** :
   $f(x)=e^{-2x}$ donc $f'(x)=-2\,e^{-2x}$ donc $f''(x)=4\,e^{-2x}>0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Donc la proposition est VRAIE.
5. **Proposition 5** :
   (u_n) est géométrique de premier terme $u_1=2$ et de raison $1,2$ donc $u_n=2\times(1,2)^{n-1}$.
   $\lim\limits_{n\to\infty}(1,2)^{n-1}=+\infty$ car $1,2>1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$ par multiplication.
   Donc la proposition est FAUSSE

Exercice 4 : spécialité

— **A1.**
Ce graphe est connexe puisqu'il existe une chaîne (par exemple $A-B-F-G-H-C-D-E$) qui passe par tous les sommets du graphe. Par ailleurs, tous les sommets du graphe sont de degré pair sauf A et F qui sont de degré 3. D'après le théorème d'Euler, ce graphe admet une chaîne eulerienne, c'est-à-dire qu'il existe un parcours passant par tous les chemins pédestres.
Un tel parcours peut être $A-E-D-A-B-D-C-B-F-C-H-G-F$.

— **A2.**
Comme le sommet E est le cinquième sommet dans l'ordre alphabétique et G le septième, le nombre de chemins de longueur 4 reliant E et G est donné par le coefficient en position $(5,7)$ de la puissance quatrième de la matrice d'adjacence.
Ce coefficient vaut 4, donc il existe quatre chemins de longueur 4 partant de E pour arriver en G.
Ces chemins sont :
— $E-D-C-F-G$
— $E-D-B-F-G$
— $E-A-B-F-G$
— $E-D-C-H-G$

— **B1.**
Dire que les points de coordonnées $(9;9)$, $(11;20)$ et $(16;2)$ font partie de la représentation graphique de f équivaut à dire que $f(9)=9$, $f(11)=20$ et $f(16)=2$.
Cela se traduit par les trois équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 81a+9b+c &= 9 \\ 121a+11b+c &= 20 \\ 256a+16b+c &= 2 \end{cases}$$

— **B2.**
L'écriture matricielle de ce système est $AX=B$, où les matrices A, B et X sont définies par :

$$A=\begin{pmatrix} 81 & 9 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On résout matriciellement ce système à l'aide de la calculatrice : $AX=B \iff X=A^{-1}B$, ce qui donne :

$$X=\begin{pmatrix} -1,3 \\ 31,5 \\ -169,2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $a=-1,3$, $b=31,5$ et $c=-169,2$. La fonction f modélisant le temps d'attente a donc pour expression :

$$f(x)=-1,3x^2+31,5x-169,2$$

— **B3.**
Trouver à quelles heures le temps d'attente est inférieur à 10 minutes revient à résoudre l'inéquation $f(x)<10$, soit :

$$f(x)<0 \iff -1,3x^2+31,5x-179,2<0$$

$x\mapsto -1,3x^2+31,5x-179,2$ est un trinôme du second degré, il a pour discriminant

$$\Delta=31,5^2-4\times(-1,3)\times(-179,2)=60,41$$

Comme $\Delta>0$, il admet deux racines réelles qui sont $x_1\approx 9,12$ et $x_2\approx 15,1$, et il est négatif en dehors de l'intervalle $[x_1;x_2]$.
D'après ce modèle, le temps d'attente sera inférieur à 10 minutes avant 9h07 et après 15h06 (ne pas oublier de convertir les centièmes d'heures en minutes).